$\boxed{1}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ $(-3\leqq x\leqq 3)$

(2) $y=x+e^{-x}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$

(3) $y=x\log x-2x$ $(1\leqq x\leqq e^2)$

(4) $y=x-\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

(5) $y=e^{-x}\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

(1) $y'=\dfrac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$y'=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$y'=0$ とすると．$x=-1, 3$

x	-3	…	-1	…	3
y'	/	$-$	0	$+$	/
y		↘		↗	

$x=3$ で最大値 $\dfrac{1}{6}$，$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

(2) $y'=1-e^{-x}$

$y'=0$ とすると．$e^{-x}=1$，$x=0$

x	-2	…	0	…	1
y'	/	$-$	0	$+$	/
y		↘		↗	

$x=-2$ で最大値 e^2-2，$x=0$ で最小値 1

(3) $y'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-2$

$y'=\log x-1$

$1<x<e^2$ において

$y'=0$ とすると $x=e$

x	1	…	e	…	e^2
y'	/	$-$	0	$+$	/
y		↘		↗	

$x=e^2$ で最大値 0

$x=e$ で最小値 $-e$

(4) $y'=1-\cos 2x\cdot 2$

$y'=1-2\cos 2x$

$0<x<\pi$ において

$y'=0$ とすると

$1-2\cos 2x=0$

$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
y'	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
y		↘		↗		↘	

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cdot\cos x$

$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$0<x<\pi$ において

$y'=0$ とすると

$\sin x-\cos x=0$

$\tan x=1$

$x=\dfrac{\pi}{4}$

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	π
y'	/	$+$	0	$-$	/
y		↗		↘	

$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$

$x=0, \pi$ で最小値 0

$\boxed{2}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{2-x^2}$　　(2)　$y=(1-\cos x)\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(3)　$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(4)　$y=\log(x^2+3)-\log(x+1)$

(1) $2-x^2 \geqq 0$

$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ のとき

$y' = \sqrt{2-x^2} + x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}$

$y' = \dfrac{-2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$

$y'=0$ とすると．$x=\pm 1$

x	$-\sqrt{2}$	…	-1	…	1	…	$\sqrt{2}$
y'	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
y		↘		↗		↘	

$x=1$ で最大値 1

$x=-1$ で最小値 -1

(2) $y' = \sin x\cdot\sin x + (1-\cos x)\cdot\cos x$

$y' = 1-\cos^2 x + \cos x - \cos^2 x$

$y' = -2\cos^2 x + \cos x + 1$

$= -(2\cos x+1)(\cos x-1)$

$0<x<2\pi$ のとき

$y'=0$ とすると

$\cos x = 1,\ -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

x	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	2π
y'	/	$+$	0	$-$	0	$+$	/
y		↗		↘		↗	

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(3) $y' = \dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると．$x=-1\pm\sqrt{2}$

x	…	$-1-\sqrt{2}$	…	$-1+\sqrt{2}$	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = 0$

よって $x=-1-\sqrt{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

$x=-1+\sqrt{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

(4) $x+1>0$．$x>-1$

$y' = \dfrac{2x}{x^2+3} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}$

$x>-1$ において $y'=0$ とすると．$x=1$．

x	-1	…	1	…
y'	/	$-$	0	$+$
y		↘		↗

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\log\frac{x^2+3}{x+1} = \infty$

$x=1$ で最小値 $\log 2$

最大値 なし

[3] 関数 $y=(ax+1)e^{-x}$ の最大値が ae となるように，正の定数 a の値を定めよ。

$$y' = a\cdot e^{-x} + (ax+1)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$= -e^{-x}(ax-a+1)$$

$y'=0$ とすると $x=\dfrac{a-1}{a}$ $(a>0)$

x	$\cdots$	$\frac{a-1}{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

$x=\dfrac{a-1}{a}$ で最大値 $ae^{-\frac{a-1}{a}}$

$$ae^{-\frac{a-1}{a}} = ae$$

$a>0$ より

$$e^{-\frac{a-1}{a}} = e$$

$$-\frac{a-1}{a} = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

これは，$a>0$ をみたす。

$$a = \frac{1}{2}$$

[4] 関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

(i) $a=0$ のとき　$f(x)=0$ となり，最大値が $\sqrt{3}$ となることはない。

(ii) $a\neq0$ のとき

$$f'(x) = \frac{a\cos x(\cos x+2) - a\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$\cos x = -\dfrac{1}{2}$，$0<x<\pi$ のとき $x=\dfrac{2}{3}\pi$

$a>0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'	/	$+$	0	$-$	/
y		$\nearrow$		$\searrow$	

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

$a=3$

これは $a>0$ をみたす。

$a<0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'	/	$-$	0	$+$	/
y		$\searrow$		$\nearrow$	

$x=0,\pi$ のとき最大値　$f(0)=f(\pi)=0$

よって不適

以上により　$a=3$