6－25　方程式の実数解の個数

1 方程式 $2x^3-ax^2+1=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

$2x^3+1=ax^2$

$x\neq 0$ であるので

$a=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$

$y=a$ と $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ の共有点を考える.

$y=2x+\dfrac{1}{x^2}$

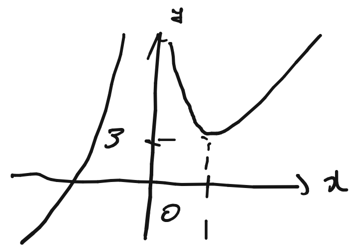
$y'=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$

$y'=0$ とすると $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	/	$-$	0	$+$
y	↗	/	↘	3	↗

$\lim_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y=-\infty$

$\lim_{x\to+0} y=\infty$, $\lim_{x\to-0} y=-\infty$



$a<3$ のとき 1個，$a>3$ のとき 3個

$a=3$ のとき 2個

2 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，(1) では $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい。

(1)　$x=e^{x-3}$　　　(2)　$x-\sin x=0$

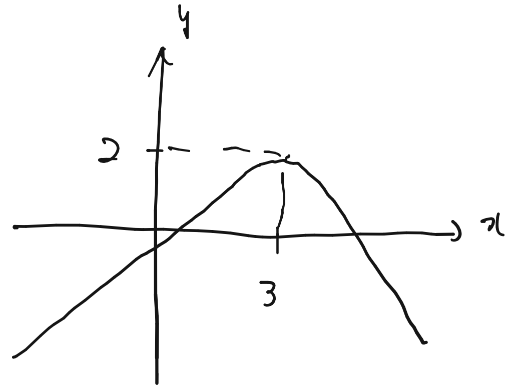
(1) $f(x)=x-e^{x-3}$ とすると

$f'(x)=1-e^{x-3}$

$f'(x)=0$ とすると $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(\dfrac{x}{e^x}-e^{-3}\right)=-\infty$　$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$y=f(x)$ と $y=0$ の交点は 2個

すなわち
与えられた方程式の実数解の
個数は 2個

(2) $f(x)=x-\sin x$ とおくと

$f'(x)=1-\cos x$

$f'(x)=0$ とすると $\cos x=1$，$x=2n\pi$（nは整数）

また，$x\neq 2n\pi$ のとき $f'(x)>0$ である.

つまり $f(x)$ は常に増加する.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

よって $y=f(x)$ と x軸の共有点は 1個

すなわち　すなわち
与えられた方程式の実数解の
個数は 1個

$\boxed{3}$ a を定数とするとき，次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。
ただし，(2) では $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ を用いてもよい。

(1)　$x^3-ax-a=0$　　　　(2)　$x^2-3=ae^x$

(1) $x^3 = a(x+1)$

$x \neq -1$ なので

$a = \frac{x^3}{x+1}$

$y=a$ と $y=\frac{x^3}{x+1}$ の交点を考える

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x+1) - x^3 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

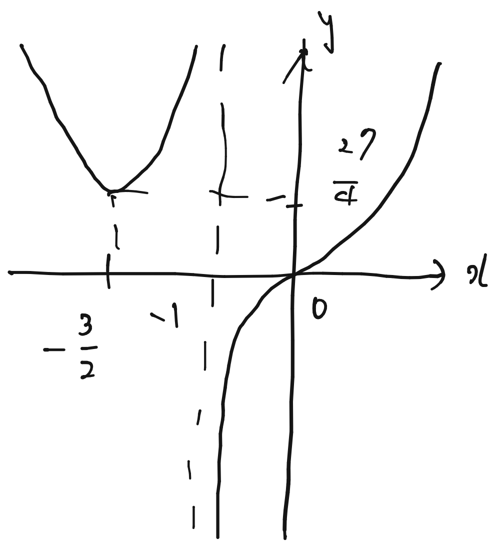
$y'=0$ とすると，$x=0,\ -\frac{3}{2}$

x	…	$-\frac{3}{2}$	…	-1	…	0	…
y'	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$+$
y	↘	$\frac{27}{4}$	↗	/	↗	0	↗

$\lim_{x\to+\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to-1+0} y = -\infty$，$\lim_{x\to-1-0} y = \infty$



$a<\frac{27}{4}$ のとき 1個

$a=\frac{27}{4}$ のとき 2個

$a>\frac{27}{4}$ のとき 3個

(2) $\frac{x^2-3}{e^x} = a$，$y=a$ と $y=\frac{x^2-3}{e^x}$ の交点を考える

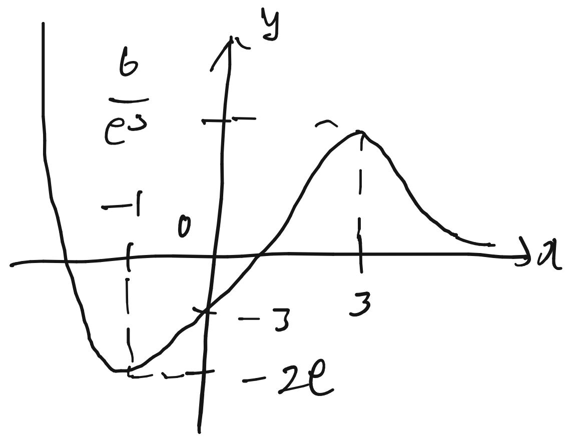
$$y' = \frac{2x \cdot e^x - (x^2-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-(x+1)(x-3)}{e^x}$$

$y'=0$ とすると，$x=-1,\ 3$.

x	…	-1	…	3	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘

$\lim_{x\to\infty} y = 0$

$\lim_{x\to-\infty} y = \infty$



$a>\frac{6}{e^3}$，$a=-2e$ のとき 1個

$-2e<a\leqq 0$，$a=\frac{6}{e^3}$ のとき 2個

$0<a<\frac{6}{e^3}$ のとき 3個

6－25　方程式の実数解の個数

4　すべての正の数 x に対して，不等式 $\sqrt{x}+2\leqq k\sqrt{x+1}$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

$\sqrt{x+1}>0$ であるから $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}\leqq k$ を考える。…①

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}$ とおいて，①がすべての正の数 x で成り立つためには k の値が $f(x)$ の最大値以上であればよい。

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-(\sqrt{x}+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{1-2\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=\dfrac{1}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\nearrow$		$\searrow$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{5}$

$\sqrt{5}>2$

$k\geqq\sqrt{5}$

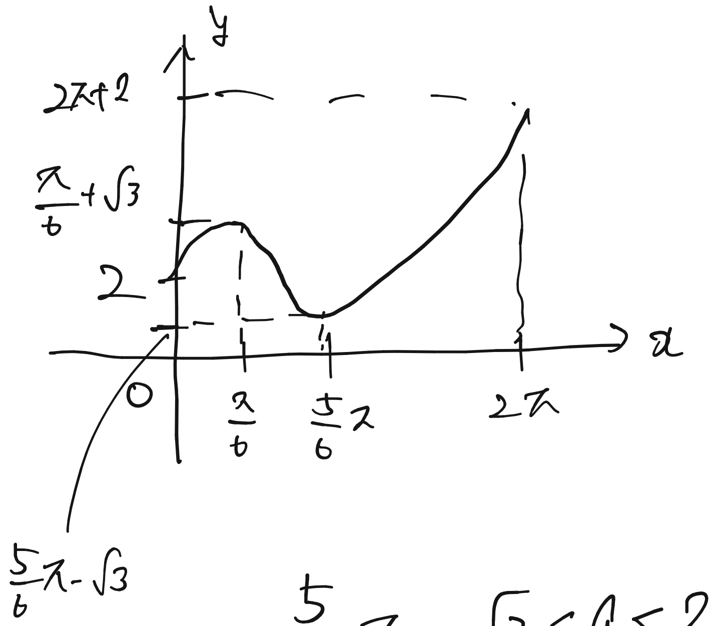
5　方程式 $x+2\cos x=a$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲に，異なる実数解をちょうど2個もつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$y=x+2\cos x$ と $y=a$ の交点を考える

$y'=1-2\sin x$

$0<x<2\pi$ で $y'=0$ とすると $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	2π
y'	/	$+$	0	$-$	0	$+$	/
y	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2\pi+2$



$\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}<a<2,\ a=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$