1 X の確率分布が右の表のようになるとき，期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。
ただし、分散 $V(X)$ は２通りで求めよ。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{35}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{10}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

$$E(X) = 1\times\frac{35}{70} + 2\times\frac{20}{70} + 3\times\frac{10}{70} + 4\times\frac{4}{70} + 5\times\frac{1}{70}$$

$$= \frac{35+40+30+16+5}{70} = \frac{126}{70} = \frac{9}{5}$$

(解1)

$$V(X) = \left(1-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{35}{70} + \left(2-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{20}{70} + \left(3-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{10}{70} + \left(4-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{4}{70} + \left(5-\frac{9}{5}\right)^2\times\frac{1}{70}$$

$$= \frac{16}{25}\times\frac{35}{70} + \frac{1}{25}\times\frac{20}{70} + \frac{36}{25}\times\frac{10}{70} + \frac{121}{25}\times\frac{4}{70} + \frac{256}{25}\times\frac{1}{70}$$

$$= \frac{560+20+360+484+256}{25\cdot 70} = \frac{1680}{25\cdot 70} = \frac{24}{25}$$

(解2)

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \left(1^2\times\frac{35}{70} + 2^2\times\frac{20}{70} + 3^2\times\frac{10}{70} + 4^2\times\frac{4}{70} + 5^2\times\frac{1}{70}\right) - \left(\frac{9}{5}\right)^2$$

$$= \frac{21}{5} - \frac{81}{5^2} = \frac{24}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

2 1 個のさいころを 3 回投げるとき，3 の倍数の目が出た回数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$X = 0, 1, 2, 3$　1個のさいころを投げて3の倍数の出る確率は $\frac{1}{3}$

$$P(X=0) = {}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

$$E(X) = 0\times\frac{8}{27} + 1\times\frac{12}{27} + 2\times\frac{6}{27} + 3\times\frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \left(0^2\times\frac{8}{27} + 1^2\times\frac{12}{27} + 2^2\times\frac{6}{27} + 3^2\times\frac{1}{27}\right) - 1^2$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3 白玉 6 個と赤玉 4 個が入っている袋から玉を次の方法で取り出す。白玉の出た回数を X とするとき，X の期待値と分散をそれぞれ求めよ。

(1)　1 個ずつ，もとに戻さず 2 回続けて取り出す。

(2)　1 個ずつ，2 回取り出す。ただし，取り出した玉は毎回もとに戻す。

(1) $X=0,1,2$

$P(X=0)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$　　$P(X=1)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}$　○×○ ●×○

$P(X=2)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{15}$　　$=\frac{8}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{5}{15}$

$=\frac{6}{5}$

$V(X)=\left(0^2\times\frac{2}{15}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{5}{15}\right)-\left(\frac{6}{5}\right)^2$

$=\frac{32}{75}$

(2) $X=0,1,2$

$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{6}{10}\right)^0\times\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{4}{25}$

$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{6}{10}\right)\times\left(\frac{4}{10}\right)=\frac{12}{25}$

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{6}{10}\right)^2\times\left(\frac{4}{10}\right)^0=\frac{9}{25}$

$E(X)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{12}{25}+2\times\frac{9}{25}=\frac{30}{25}=\frac{6}{5}$

$V(X)=\left(0^2\times\frac{4}{25}+1^2\times\frac{12}{25}+2^2\times\frac{9}{25}\right)-\left(\frac{6}{5}\right)^2$

$=\frac{48}{25}-\frac{36}{25}=\frac{12}{25}$

4 0，1，2 のいずれかの値をとる確率変数 X の期待値および分散が，それぞれ 1，$\frac{1}{2}$ であるとする。このとき，X の確率分布を求めよ。

$P(X=0)=P_0$，$P(X=1)=P_1$，$P(X=2)=P_2$ とすると

$E(X)=1$ より　　$V(X)=\frac{1}{2}$ より

$0\times P_0+1\times P_1+2\times P_2=1$　　$E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{2}$

$P_1+2P_2=1$ …①　　$(0^2\times P_0+1^2\times P_1+2^2\times P_2)-1^2=\frac{1}{2}$

$P_1+4P_2=\frac{3}{2}$ …②

また，

$P_0+P_1+P_2=1$ …③

①，②，③より

$P_1=\frac{2}{4}$，$P_2=\frac{1}{4}$，$P_0=\frac{1}{4}$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1