2－5　確率変数の独立と事象の独立＋確率変数の積の期待値

1　次の 2 つの事象 A，B は独立であるか，従属であるか。

(1)　ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚を抜き出すとき

A：ハート，　　B：エース

(2)　1 から 9 までの 9 個の整数から 1 個の整数を選ぶとき

A：奇数，　　B：5 以下

(3)　大小 2 個のさいころを同時に投げるとき

A：大きいさいころの目が偶数，　　B：目の和が偶数

(1)

$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$　　$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$

$P(B)=\frac{4}{52}$　　$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{52}=P(A\cap B)$　独立

(2)

$P(A)=\frac{5}{9}$　　$P(A\cap B)=\frac{3}{9}$

$P(B)=\frac{5}{9}$　　$P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\neq\frac{3}{9}=P(A\cap B)$　従属

(3)

$P(A)=\frac{3}{6}$　　$P(A\cap B)=\frac{3\times3}{6^2}=\frac{1}{4}$

B：偶+偶 or 奇+奇　　$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=P(A\cap B)$

$P(B)=\frac{3\times3}{6^2}+\frac{3\times3}{6^2}=\frac{1}{2}$　　独立

2　硬貨とさいころを同時に投げるとき，硬貨で表が出たら 1，裏が出たら 0 となる確率変数を X とし，さいころの出た目の数を Y とする。このとき，確率変数 XY の期待値を求めよ。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$E(Y)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}$

$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

X と Y は独立なので

$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{4}$

3　A は 2 枚，B は 3 枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数をそれぞれ X，Y とするとき，積 XY の期待値を求めよ。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(Y)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

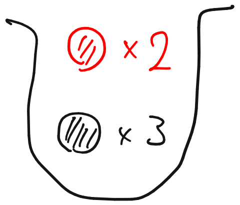
X と Y は独立なので

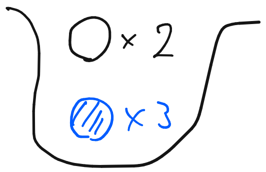
$E(XY)=E(X)E(Y)$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

4 袋Ａの中には赤玉２個，黒玉３個，袋Ｂの中には白玉２個，青玉３個が入っている。Ａから玉を２個同時に取り出したときの赤玉の個数を X，Ｂから玉を２個同時に取り出したときの青玉の個数を Y とするとき，X，Y は確率変数である。このとき，期待値 $E(X+4Y)$ と $E(XY)$ を求めよ。

A $\Rightarrow$ 2コ　　B $\Rightarrow$ 2コ





Aから出る赤玉の個数をX

Bから出る青玉の個数をY

$P(X=0)=\dfrac{{}_2C_0\times{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

$P(X=1)=\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_2C_2\times{}_3C_0}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

$E(X)=0\times\dfrac{3}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{1}{10}$

$=\dfrac{4}{5}$

$P(Y=0)=\dfrac{{}_3C_0\times{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

$P(Y=1)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$

$P(Y=2)=\dfrac{{}_3C_2\times{}_2C_0}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

$E(Y)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{3}{10}$

$=\dfrac{6}{5}$

$E(X+4Y)=E(X)+4E(Y)$

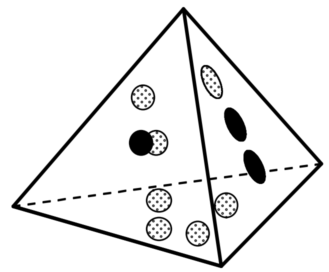
$=\dfrac{4}{5}+4\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{28}{5}$

XとYは独立なので

$E(XY)=E(X)E(Y)$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{24}{25}$

5 各面に，-2，-1，0，1，2，2 の数字を記入したさいころと，右の図のように作られた正四面体のさいころを同時に投げるとき，底面の目の数をそれぞれ X，Y とすると，X，Y は確率変数である。このとき，期待値 $E(2X+Y)$，$E(XY)$ を求めよ。



X	-2	-1	0	1	2	2	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=-2\times\dfrac{1}{6}+(-1)\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{1}{3}$

$E(Y)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$

$E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)$

$=2\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{2}$

$=\dfrac{19}{6}$

XとYは独立なので

$E(XY)=E(X)E(Y)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2}$

$=\dfrac{5}{6}$