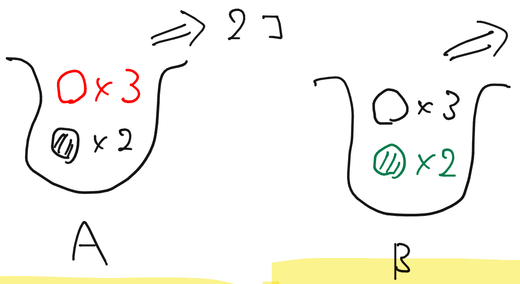
２－６　確率変数の和の分散

$\boxed{1}$ 確率変数 X,Y について $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ となることを説明せよ。ただし、確率変数 X,Y は互いに独立であるとする。

動画を確認

$\boxed{2}$ 袋Ａの中に赤い玉３個，黒い玉２個，袋Ｂの中には白い玉３個，緑の玉２個が入っている。Ａから玉を２個同時に取り出したときの赤い玉の個数を X，Ｂから玉を２個同時に取り出したときの緑の玉の個数を Y とするとき，X，Y は確率変数である。このとき，期待値 $E(X+3Y)$ と $E(XY)$ を求めよ。



X, Y はともに とりうる値は

0, 1, 2

$P(X=0)=\dfrac{{}_3C_0\times{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2\times{}_2C_0}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$E(Y)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$E(X+3Y)=E(X)+3E(Y)$

$=\frac{6}{5}+3\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$

X, Y は独立なので

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

$=\frac{6}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$

$\boxed{3}$ １個のさいころを２回投げるとき，１回目，２回目に出た目をそれぞれ X，Y とする。$2X-Y$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6	計
Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$

XとYは同じ確率分布なので，$E(X)=E(Y)$，$V(X)=V(Y)$ である

$E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)$

$=2\cdot\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$

XとYは互いに独立なので

$V(2X-Y)=V(2X)+V(-Y)$

$=2^2V(X)+(-1)^2V(Y)$

$=4\times\frac{35}{12}+1\cdot\frac{35}{12}=\frac{175}{12}$

$\sigma(2X-Y)=\sqrt{\frac{175}{12}}=\frac{5\sqrt{21}}{6}$

2－6　確率変数の和の分散

4　1 個のさいころを投げて，出た目の数が素数のときその数を X とし，それ以外のとき $X=6$ とする。次に，2 枚の硬貨を投げて，表の出た硬貨の枚数を Y とするとき，X，Y は確率変数である。このとき，分散 $V(2X+Y)$，$V(3X-2Y)$ を求めよ。

Xのとりうる値は、$X=2,3,5,6$ ，Yのとりうる値は $Y=0,1,2$

X	2	3	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{3}{6}=\frac{14}{3}$$

$$V(X)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{3}{6}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{23}{9}$$

$$E(Y)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

$$V(Y)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{2}{4}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\frac{1}{2}$$

XとYは互いに独立なので

$$V(2X+Y)=2^2V(X)+V(Y)=\frac{193}{18}$$

$$V(3X-2Y)=3^2V(X)+(-2)^2V(Y)=25$$

5　500 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和の期待値と分散を求めよ。

500円硬貨で表が出る枚数X
100円　〃　Y　とする

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$V(Y)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

求める期待値は $E(500X+100Y)$ なので

$$E(500X+100Y)=500E(X)+100E(Y)=400$$

XとYは互いに独立なので

$$V(500X+100Y)=500^2V(X)+100^2V(Y)=70000$$

6　白球 4 個，黒球 6 個が入っている袋から球を 1 個取り出し，もとに戻す操作を 10 回行う。白球の出る回数を X とするとき，X の期待値と分散を求めよ。

次回、次々回に向けて
自分で考えよう!!