２－４　確率変数の和の期待値

[1] 2枚の硬貨を同時に投げる試行を2回行う。1回目の試行で表の出る枚数を X，2回目の試行で表の出る枚数を Y とするとき，X と Y の同時分布を求めよ。

1回目の試行と2回目の試行は独立

Xのとりうる値は $X=0,1,2$

Yの 〃 $Y=0,1,2$

$P(X=0)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{2}{2^2}=\frac{2}{4}$, $P(X=2)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

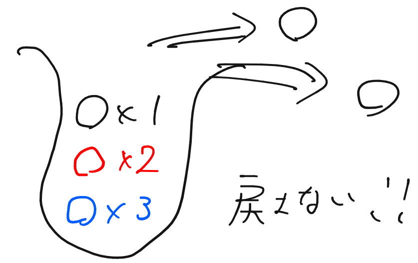
$P(Y=0)=\frac{1}{4}$, $P(Y=1)=\frac{2}{4}$, $P(Y=2)=\frac{1}{4}$

X＼Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

[2] 袋の中に白球が1個，赤球が2個，青球が3個入っている。この袋から，もとに戻さずに1球ずつ2個の球を取り出すとき，取り出された赤球の数を X，取り出された青球の数を Y とする。このとき，X と Y の同時分布を求めよ。

<ポイント>

取り出し方をすべて考えた方が早い!!



球の取り出し方は5通り

(i) 白×1，赤1　(ii) 白×1，青1　(iii) 赤×2　(iv) 青×2　(v) 赤×1，青×1

(i)のとき $X=1, Y=0$

$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

(ii)のとき $X=0, Y=1$

$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$

(iii)のとき $X=2, Y=0$

$P(X=2,Y=0)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

(iv)のとき $X=0, Y=2$

$P(X=0,Y=2)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{15}$

(v)のとき $X=1, Y=1$

$P(X=1,Y=1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$
$=\frac{6}{15}$

X＼Y	0	1	2	計
0	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$
計	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

3 次の硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

(1)　500 円硬貨 2 枚　　(2)　500 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚

(3)　500 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 3 枚

(1) 500円硬貨の表の出る回数 X とすると

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(500X)=500\times E(X)=500$

(2) (1)と同様に500円硬貨の表の出る回数 X

100円硬貨の表の出る回数 Y とする.

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(Y)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$E(500X+100Y)=500E(X)+100E(Y)$

$=500+50=550$

(3) X, Y は(2)と同様

10円硬貨の表の出る回数 Z とする

Z	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(Z)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(500X+100Y+10Z)=500E(X)+100E(Y)+10E(Z)$

$=550+15=565$

4 100 円硬貨 3 枚と 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

100円硬貨の表の出る回数 X とする

10円 〃 Y

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)$

$=100\times\frac{3}{2}+10\times1=160$