1 次の二項分布について、確率分布を書き、平均，分散と標準偏差を求めよ。

(1) $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$　　(2) $B\left(5, \frac{1}{4}\right) \to E(X) = \frac{5}{4},\ V(X) = \frac{15}{16}$　$\sigma(X) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

(1)

X	0	1	…	6	計
P	$_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6$	…	$_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$	1

$$E(X) = 0\times{}_6C_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + 1\times{}_6C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots + 6\times{}_6C_6\left(\tfrac{1}{2}\right)^6$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times\left({}_6C_1 + 2\cdot{}_6C_2 + 3\times{}_6C_3 + 4\times{}_6C_4 + 5\times{}_6C_5 + 6\times{}_6C_6\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times\left(6 + \frac{2\cdot6\cdot5}{2\cdot1} + 3\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} + 4\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1} + 5\cdot6 + 6\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times(6+30+60+60+30+6)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times192 = 3 \qquad E(X) = 3$$

$$E(X^2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times\left(1^2\times{}_6C_1 + 2^2\times{}_6C_2 + 3^2\times{}_6C_3 + 4^2\times{}_6C_4 + 5^2\times{}_6C_5 + 6^2\times{}_6C_6\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times\left(6 + 4\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1} + 9\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} + 16\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1} + 25\times6 + 36\cdot1\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times(6+60+180+240+150+36)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^6\times672 = \frac{21}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{21}{2} - 9 = \frac{3}{2} \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2 さいころを 8 回投げるとき，4 以上の目が出る回数を X とする。
このとき、確率変数 X は、二項分布 B(ア，イ)に従う。
また、X の確率分布を利用して平均と標準偏差を求めよ。

4以上の目が出る確率は $\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{1}{2}$　Xは $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ に従う。

X	0	1	…	8	計
P	$_8C_0\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^8$	…	$_8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$	1

$$E(X) = 0\times{}_8C_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + 1\times{}_8C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + \cdots + 8\times{}_8C_8\left(\tfrac{1}{2}\right)^8$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^8\times\left({}_8C_1 + 2\times{}_8C_2 + \cdots + 8\times{}_8C_8\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^8\times\left(8 + 2\cdot\frac{8\cdot7}{2\cdot1} + 3\times\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} + 4\times\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} + 5\times\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} + 6\cdot\frac{8\cdot7}{2\cdot1} + 7\cdot8 + 8\right)$$

$$= 4$$

$$E(X^2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^8\times\left(1^2\times{}_8C_1 + 2^2\times{}_8C_2 + \cdots + 8^2\times{}_8C_8\right)$$

$$= 18$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 18 - 16 = 2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2}$$

3 二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数の期待値が np であることを証明せよ。

$q = 1 - p$ とする。

X	0	1	2	$\cdots$	n	計
P	${}_nC_0 p^0 q^n$	${}_nC_1 p q^{n-1}$	${}_nC_2 p^2 q^{n-2}$		${}_nC_n p^n$	1

$$E(X) = 0 \times {}_nC_0 q^n + 1 \times {}_nC_1 p q^{n-1} + 2 \times {}_nC_2 p^2 q^{n-2} + \cdots + n \times {}_nC_n p^n$$

$$= 1 \times {}_nC_1 p q^{n-1} + 2 \times {}_nC_2 p^2 q^{n-2} + \cdots + r \times {}_nC_r p^r q^{n-r} + \cdots + n \times {}_nC_n p^n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times {}_nC_k \, p^k q^{n-k}$$

$$k \times {}_nC_k = k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!\,(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \times {}_{n-1}C_{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} \, p^k q^{n-k}$$

$$= n \left({}_{n-1}C_0 \, p q^{n-1} + {}_{n-1}C_1 \, p^2 q^{n-2} + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} \, p^n \right)$$

$$= np \left({}_{n-1}C_0 \, q^{n-1} + {}_{n-1}C_1 \, p q^{n-2} + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} \, p^{n-1} \right)$$

$$= np\,(p+q)^{n-1} = \underline{\underline{np}}$$