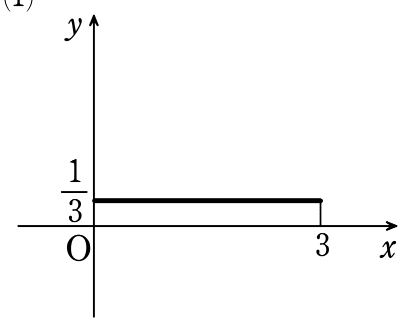
２－９　連続した値をとる確率変数

1 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で表されるとき，指定されたそれぞれの確率を求めよ。

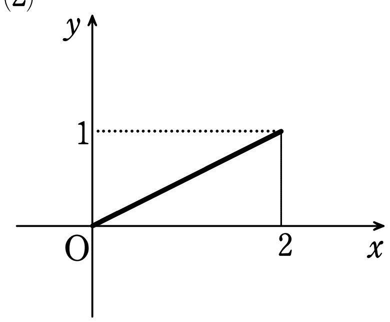
(1)　$f(x)=\frac{1}{3}$　$(0\leqq x\leqq 3)$　　$P(0\leqq X\leqq 1.5)$，$P(0.5\leqq X\leqq 2)$

(2)　$f(x)=\frac{1}{2}x$　$(0\leqq x\leqq 2)$　　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$，$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)$

(1)



(2)



(1) $P(0\leqq X\leqq 1.5)=\int_0^{1.5}\frac{1}{3}\,dx=\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{1.5}=1.5\times\frac{1}{3}=\underline{\underline{0.5}}$

$=\frac{1}{3}\times 1.5=\underline{\underline{0.5}}$

$P(0.5\leqq X\leqq 2)=\int_{0.5}^{2}\frac{1}{3}\,dx=\left[\frac{1}{3}x\right]_{0.5}^{2}=\underline{\underline{0.5}}$

$=\frac{1}{3}\times(2-0.5)=\underline{\underline{0.5}}$

(2) $P(0.3\leqq X\leqq 0.7)=\int_{0.3}^{0.7}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.3}^{0.7}=\underline{\underline{0.1}}$

$=\frac{1}{2}(0.15+0.35)\times 0.4=\underline{\underline{0.1}}$

$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\int_{0.4}^{1.6}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.4}^{1.6}=\underline{\underline{0.6}}$

$=\frac{1}{2}(0.2+0.8)\times 1.2=\underline{\underline{0.6}}$

2 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\frac{2}{3}x$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{3})$ で表されるとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$E(X)=\int_0^{\sqrt{3}}x\times\frac{2}{3}x\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{3}x^2\,dx=\left[\frac{2}{9}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

$V(X)=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}x\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^3-\frac{4\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}x^3\,dx-\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dx+\frac{8}{9}\int_0^{\sqrt{3}}x\,dx$

$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{8}{9}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{6}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{6}}}$

3 確率変数 X のとる値が $0\leqq X\leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\frac{1}{2}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ で与えられるとき，$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)$ を求めよ。また，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\int_{0.4}^{1.6}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.4}^{1.6}=\underline{\underline{0.6}}$

$E(X)=\int_0^2 x\times\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

$V(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right]_0^2=\underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}}$

２－９　連続した値をとる確率変数

$\boxed{4}$ (1)　確率変数 X の確率密度関数が右の $f(x)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\leqq x\leqq 0) \\ 1-x & (0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

（ア）　$P(0.5\leqq X\leqq 1)$　　　（イ）　$P(-0.5\leqq X\leqq 0.3)$

(2)　関数 $f(x)=a(3-x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ が確率密度関数となるように，正の定数 a の値を定めよ。また，このとき，確率 $P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$ を求めよ。

(1) (ア) $P(0.5\leqq x\leqq 1)=\int_{0.5}^{1}(1-x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0.5}^{1}$

$=1-\frac{1}{2}-\left(0.5-\frac{1}{8}\right)=\underline{\underline{0.125}}$

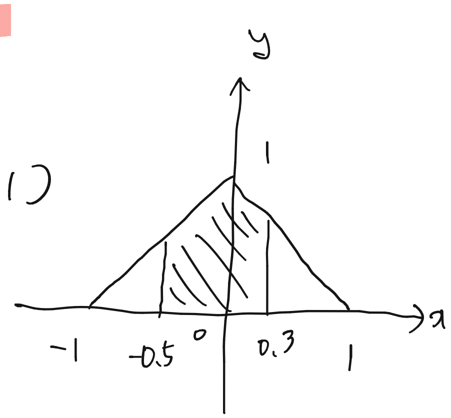
$=\frac{1}{2}\times 0.5\times 0.5=\underline{\underline{0.125}}$

(イ) $P(-0.5\leqq x\leqq 0.3)$

$=1-P(-1\leqq x\leqq -0.5)-P(0.3\leqq x\leqq 1)$

$=1-\frac{1}{2}\times 0.5\times 0.5-\frac{1}{2}\times 0.7\times 0.7$

$=\underline{\underline{0.63}}$



(2) $\int_0^1 a(3-x)\,dx=1$ であればよい

$\int_0^1(3a-ax)\,dx=1$

$\left[3ax-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1=1$

$3a-\frac{1}{2}a=1$

$a=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

$P(0.3\leqq x\leqq 0.7)$

$=\int_{0.3}^{0.7}\frac{2}{5}(3-x)\,dx$

$=\int_{0.3}^{0.7}\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{5}x\right)dx$

$=\left[\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}x^2\right]_{0.3}^{0.7}$

$=\underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

$\boxed{5}$ 確率変数 X が区間 $0\leqq X\leqq 10$ の任意の値をとることができ，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\frac{3}{500}x(10-x)$ で与えられている。このとき，次のものを求めよ。

(1)　確率 $P(3\leqq X\leqq 7)$　　(2)　期待値 $E(X)$　　(3)　標準偏差 $\sigma(X)$

(1) $P(3\leqq x\leqq 7)=\int_3^7\frac{3}{500}x(10-x)\,dx=\frac{3}{500}\int_3^7(10x-x^2)\,dx$

$=\frac{3}{500}\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_3^7=\underline{\underline{\frac{71}{125}}}$

(2) $E(x)=\int_0^{10}x\times\frac{3}{500}x(10-x)\,dx=\frac{3}{500}\int_0^{10}(10x^2-x^3)\,dx$

$=\frac{3}{500}\left[\frac{10}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=\underline{\underline{5}}$

(3) $V(x)=\int_0^{10}(x-5)^2\times\frac{3}{500}x(10-x)\,dx=\underline{\underline{5}}$

$\sigma(x)=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$

$\boxed{6}$ 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\frac{2}{3}x$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{3})$ であるとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$E(x)=\int_0^{\sqrt{3}}x\times\frac{2}{3}x\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{3}x^2\,dx=\left[\frac{2}{9}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

$V(x)=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}x\,dx=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$\sigma(x)=\sqrt{\frac{1}{6}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{6}}}$

$\boxed{2}$ と同様。改めて計算練習する!!