２－１　空間導入・成分・内積③

$\boxed{1}$ 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ 3,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(-3,\ -9,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1-1-\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

$|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ，$|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$　　$\underline{\underline{\theta = 120^\circ}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ ，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$\underline{\underline{\theta = 90^\circ}}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -42$

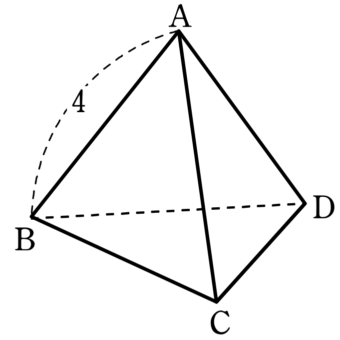
$|\vec{a}| = 3\sqrt{14}$ ，$|\vec{b}| = \sqrt{14}$

$\cos\theta = \dfrac{-42}{3\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = -1$

$\underline{\underline{\theta = 180^\circ}}$

$\boxed{2}$ 1 辺の長さが 4 の正四面体 ABCD において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$

$= \underline{\underline{8}}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} = |\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{DA}|\cos 120^\circ$

$= \underline{\underline{-8}}$

$\boxed{3}$ 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ -5,\ -3)$，$\vec{b}=(x-2,\ -4,\ 3)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$，$\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2(x-2)-5\times(-4)-3\times3=0$

$x=-\frac{7}{2}$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$1\times(-x^2)+2\times2+x\times3=0$

$x^2-3x-4=0$

$x=-1,\ 4$

$\boxed{4}$ 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{21}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$　　$x+2y+3z=0$

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$　　$x-2y+z=0$

$|\vec{p}|=\sqrt{21}$ より　　$x^2+y^2+z^2=21$

これを解くと，$x=4,\ y=1,\ z=-2$

$x=-4,\ y=-1,\ z=2$

$\vec{p}=(4,\ 1,\ -2),\ (-4,\ -1,\ 2)$

$\boxed{5}$ $\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$，$\vec{c}=(-1,\ 0,\ 1)$ とする。$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ が $\vec{b}$，$\vec{c}$ の両方に垂直で，$\vec{a}\cdot\vec{p}=1$ であるとき，x，y，z の値を求めよ。

$\vec{p}\perp\vec{b}$ より $\vec{p}\cdot\vec{b}=0$　　$x-y=0$

$\vec{p}\perp\vec{c}$ より $\vec{p}\cdot\vec{c}=0$　　$-x+z=0$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=1$　　$x+y=1$

$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$

$\boxed{6}$ 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 4,\ 0)$，$\vec{b}=(0,\ x,\ -\sqrt{7})$ のなす角が 45° のとき，x の値を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times0+4\times x+0\times(-\sqrt{7})=4x$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos45^\circ$

$4x=\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+7}$

(右辺)>0 より $4x>0$，$x>0$

<今日のふりかえり>　$x^2=25$，$x=5$ $(\because x>0)$