２－３ 空間ベクトル（同一平面応用）

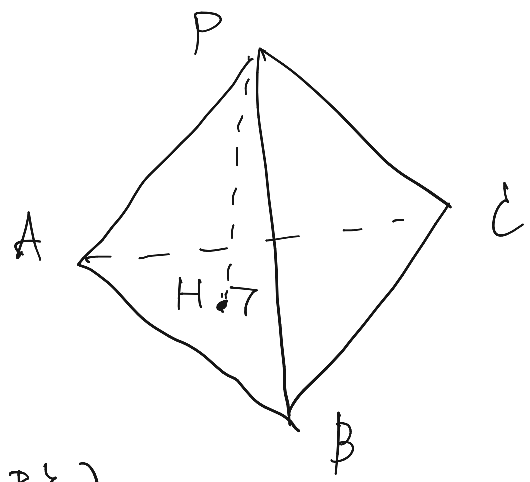
$\boxed{1}$ 平行六面体 ABCD－EFGH において，辺 CG の G を越える延長上に GM＝2GC となるように点 M をとる。直線 AM と平面 BDE の交点を N とするとき，AN：AM を求めよ。

$\boxed{2}$ 3 点 A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，1) の定める平面 ABC に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

3 1辺の長さが1の正四面体PABCにおいて，点Pから平面ABCに垂線PHを下ろす。$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すことにより，点Hは△ABCの重心であることを示せ。



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

(2) 点Hは平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ （s, tは実数）

$\overrightarrow{PH}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

PH⊥平面ABCであるから

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から

$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+t\vec{c}\cdot\vec{b}-(1-s-t)|\vec{a}|^2$

$-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$(1-s-t)\times\frac{1}{2}+s+t\times\frac{1}{2}-(1-s-t)\cdot1-s\cdot\frac{1}{2}-t\cdot\frac{1}{2}=0$

$\frac{1}{2}\cancel{-\frac{1}{2}s}\cancel{-\frac{1}{2}t}+s+\frac{1}{2}t-1\cancel{+s}\cancel{+t}\cancel{-\frac{1}{2}s}\cancel{-\frac{1}{2}t}=0$

$s+\frac{1}{2}t=\frac{1}{2} \iff 2s+t=1$ …①

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から

$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{c}+s\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2-(1-s-t)|\vec{a}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}$

$-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$(1-s-t)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s+t-(1-s-t)-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t=0$

$\frac{1}{2}\cancel{-\frac{1}{2}s}\cancel{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}s+t-1\cancel{+s}\cancel{+t}\cancel{-\frac{1}{2}s}\cancel{-\frac{1}{2}t}=0$

$\frac{1}{2}s+t=\frac{1}{2} \iff s+2t=1$ …②

①，②より $s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{3}$

よって $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

すなわち

点Hは△ABCの重心

<今日のふりかえり>