2－2 空間ベクトル（同一直線）

$\boxed{1}$ 3点 A(7, −5, −1), B(9, −8, 4), C(a, 1, b) が一直線上にあるように，a，b の値を定めよ。

3点 A, B, C が 同一直線上にあるとき

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ （kは実数）と表される

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a-7 \\ 6 \\ b+1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

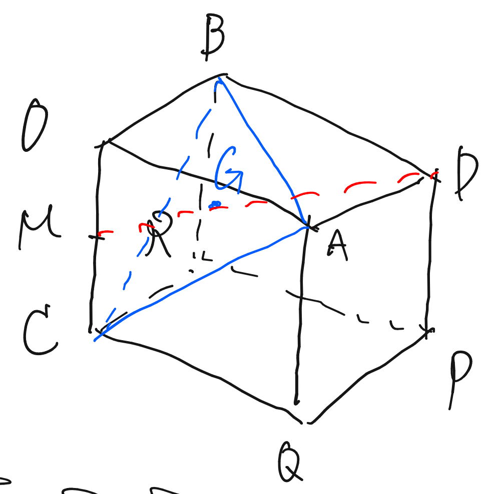
$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ より
$$\begin{cases} a-7 = 2k \\ 6 = -3k \\ b+1 = 5k \end{cases}$$

よって $k = -2$

$a = 3$, $b = -11$

$a = 3$, $b = -11$

$\boxed{2}$ 直方体 OADB−CQPR において，辺 OC の中点を M，△ABC の重心を G とする。3点 M，G，D は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{OD} = \vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{MD} = \vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{MG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$

よって

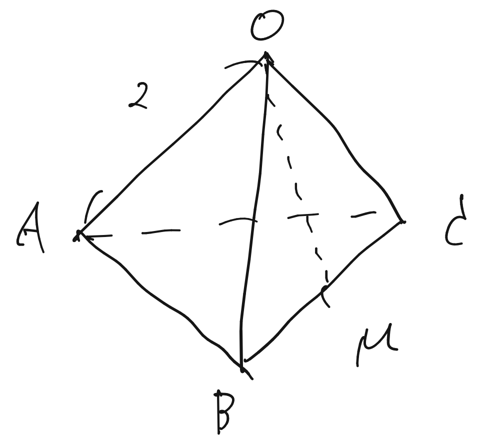
$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$

したがって

3点M, G, Dは同一直線上

$\boxed{3}$ 1辺の長さが2の正四面体 OABC において，辺 BC の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ を求めよ。　　(2) $\cos\angle AOM$ の値を求めよ。



(1)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)$

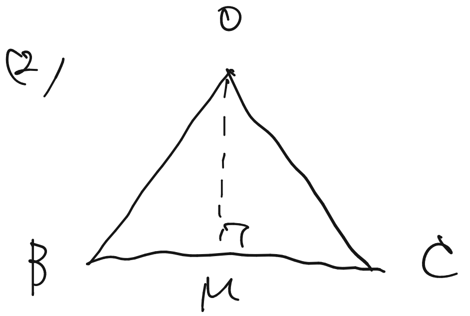
$= \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{2}$

ここで

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 2\times2\times\cos60^\circ = 2$

よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{2+2}{2} = 2$

(2)



△OBCは正三角形なので

OM ⊥ BC　したがって

OB = 2 より OM = $\sqrt{3}$

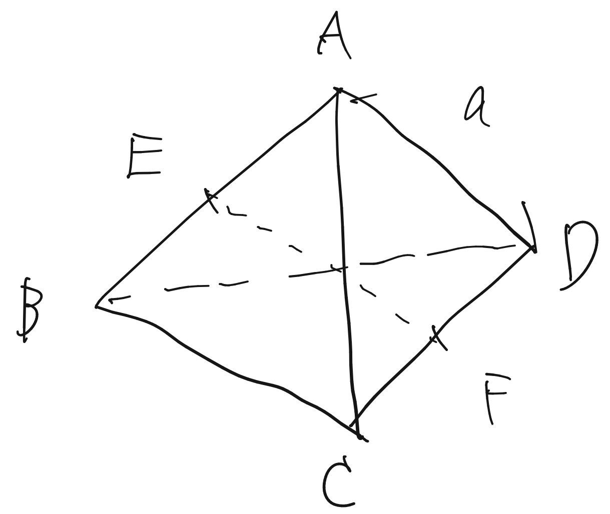
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\cos\angle AOM$ より

$2 = 2\times\sqrt{3}\cos\angle AOM$

$\cos\angle AOM = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$ 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とするとき，AB⊥EF であることをベクトルを用いて証明せよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$



$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$$
$$=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\vec{b}\cdot\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}\right)$$
$$=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2}{2}$$

ここで $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=a\times a\times\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$

すなわち $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a^2}{2}=0$

よって $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{EF}\neq\vec{0}$ なので $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{EF}$

したがって AB⊥EF

$\boxed{5}$ 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，△MBC の重心を G とし，直線 OG と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。※次回の内容も入っているが自力でチャレンジしよう。

次回のポイント

<今日のふりかえり>